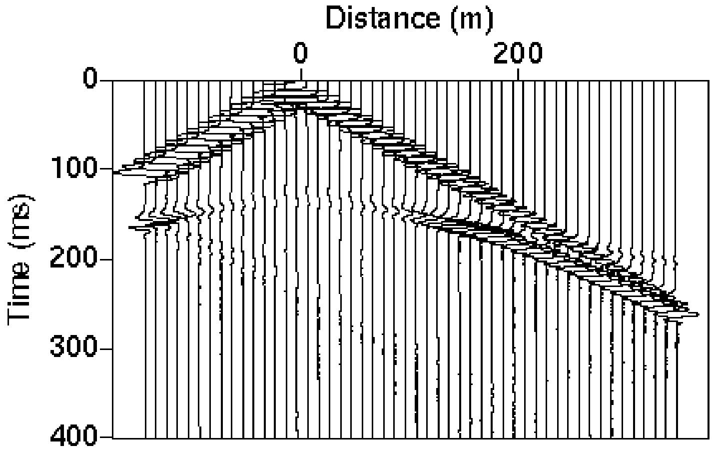
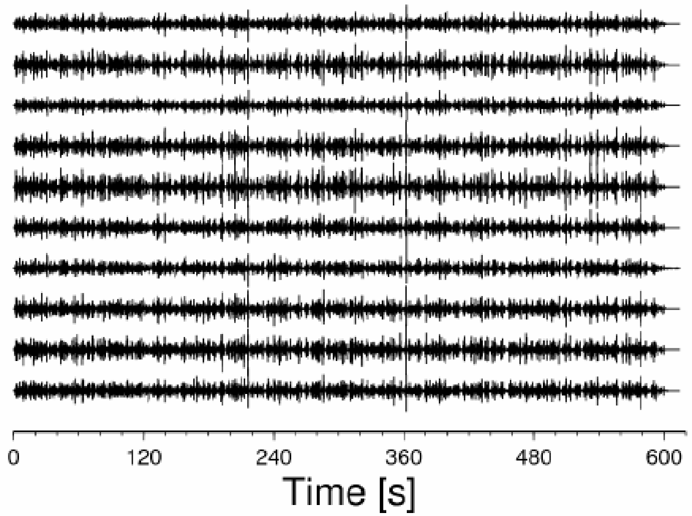
Obiettivo di questo ciclo di lezioni è l'acquisizione di nozioni di base per:

1. *la descrizione del segnale sismico (analisi spettrale) e per la sua misura sperimentale (risposta strumentale)*
2. *l'interpretazione del segnale sismico in termini di onde sismiche e caratteristiche meccaniche del sottosuolo*
3. *per l'impiego di tecniche di sismica passiva a stazione singola (HVSR) e antenna sismica (Array) per la caratterizzazione dinamica del sottosuolo*
4. *per l'applicazione in campagna di queste tecniche nell'ambito di problemi di geologia applicata all'ingegneria e alla prevenzione dei rischi naturali*





Cosa sono i Segnali Sismici?

Si tratta in generale di misure dei movimenti del suolo nelle tre direzioni dello spazio

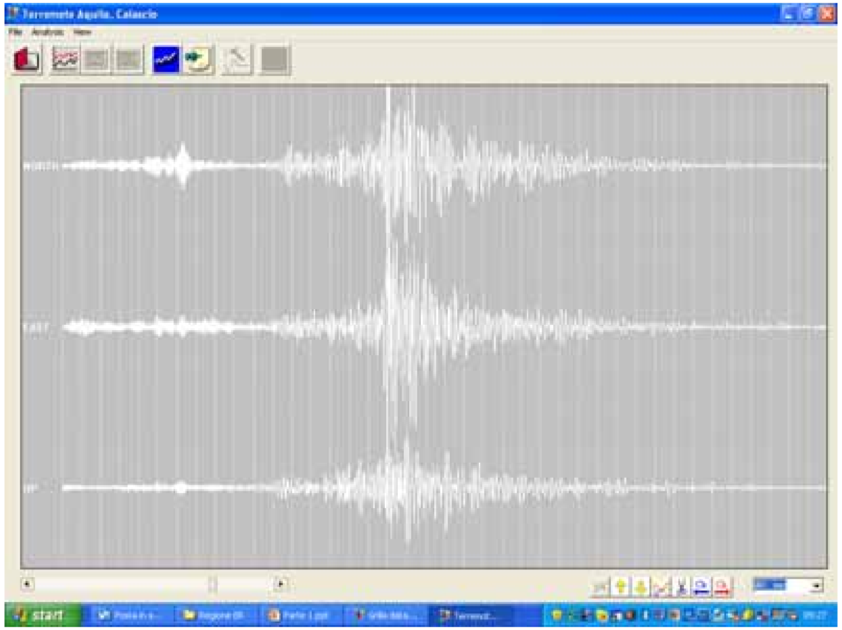
A seconde degli strumenti utilizzati si tratta di misure di velocità del moto del suolo (registrazioni **velocimetriche**) o di accelerazione del moto del suolo (registrazioni **accelerometriche**)

Si tratta comunque si serie temporali (più o meno lunghe) che contengono informazioni sul moto del terreno indotto da perturbazioni di origine naturale o artificiale, controllate o non controllate che si propagano nel sottosuolo principalmente in forma di onde elastiche

Un linguaggio per la “descrizione” delle serie

- Qualunque sia lo scopo e l’oggetto dell’analisi, il primo passo è mettere a punto un linguaggio che ci permetta di descrivere univocamente la “fenomenologia” che si manifesta nella sequenza di misure
- Questo linguaggio, per essere generale, deve riguardare la FORMA della serie ed essere quindi indipendente dal tipo di variabile di volta in volta considerata e dal processo in corso di studio
- Questo permette la messa a punto di metodi di analisi del tutto generali che possono essere agevolmente adattati a specifici problemi

Cosa hanno in comune o di diverso queste tracce)?



(si noti che le scale di ampiezza e durata sono le stesse

Si vede come le situazioni siano assai differenti anche se ci si concentra solo su sequenze temporali: quando si prendono in considerazioni altri tipi di sequenze (nello spazio, nello spazio-tempo) i problemi non cambiano

Abbiamo bisogno di un apparato descrittivo: esiste una **fenomenologia** delle sequenze e serve un “**linguaggio**” per descriverla

Di primario interesse è la disponibilità di uno strumento di carattere generale capace di rappresentare completamente la serie temporale con una forma funzionale F(t) manipolabile per via analitica

In generale, la forma della serie sarà complicata

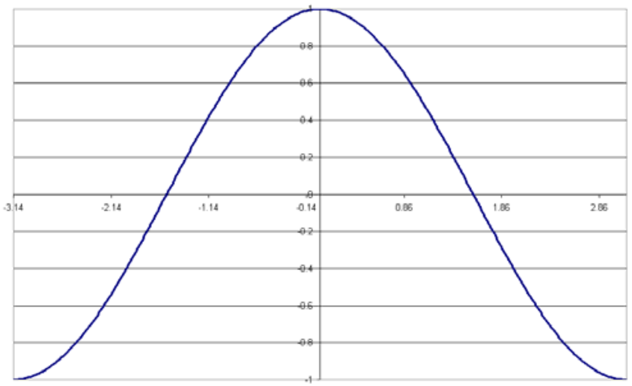
Invece di definire una funzione “complicata” che si adatti alla serie, si preferisce ricorrere alla combinazione di funzioni “semplici”, “componibili” a piacere per riprodurre una “qualunque” forma osservata

Esistono molte possibilità in questo senso. Quella che storicamente è la prima e forse la più famosa è basata su funzioni del tipo

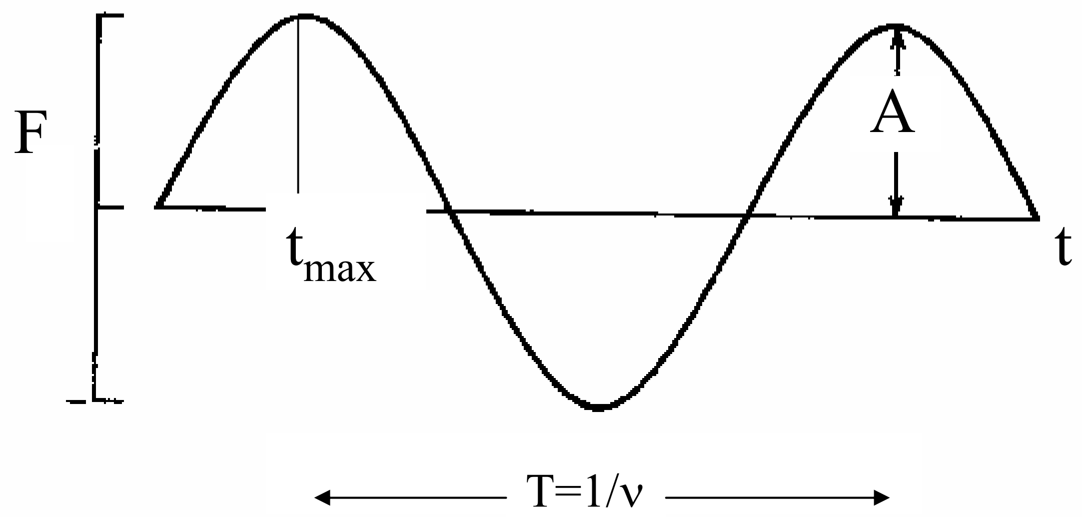
$$F(x)=\cos(x)$$

E' una funzione periodica, semplice (derivabile) e trascendente

Naturalmente, nella sua forma più semplice, non è adattabile dato che presenta ampiezza fissate [-1,1], è definita nell'intervallo $[0,2\pi]$, ha gli estremi in posizione fissata $[0, \pi]$



La cosinusoide “generalizzata” ha la forma

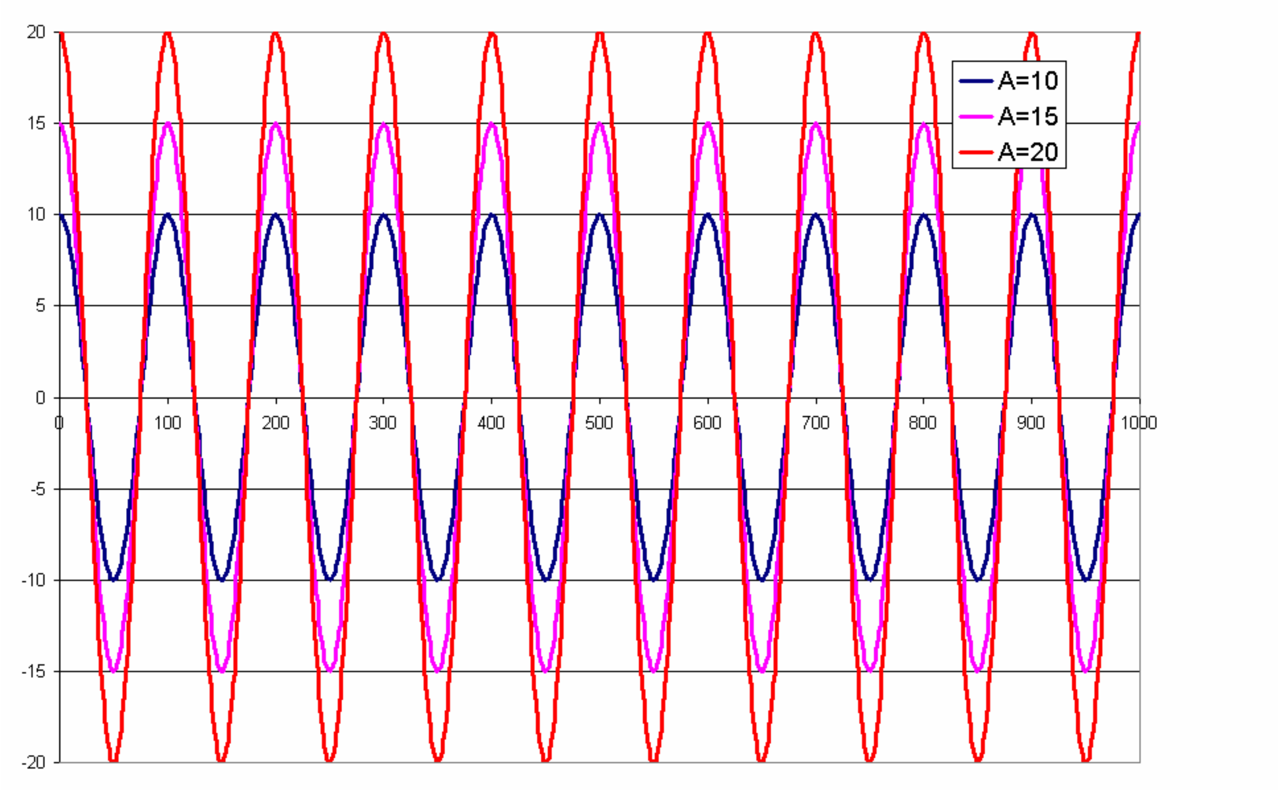


$$F(t) = A\cos(2\pi\nu t - \phi)$$

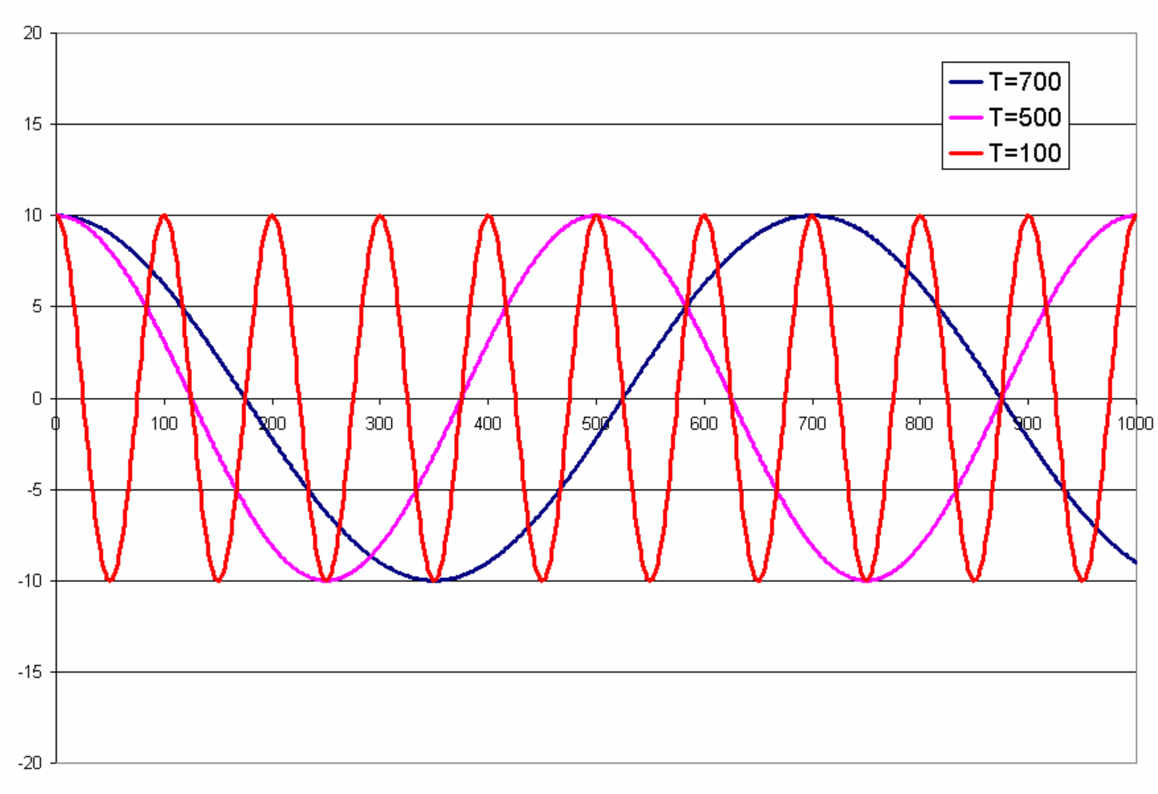
$$\phi = 2\pi\nu t_{max}$$

$$T = 1/\nu$$

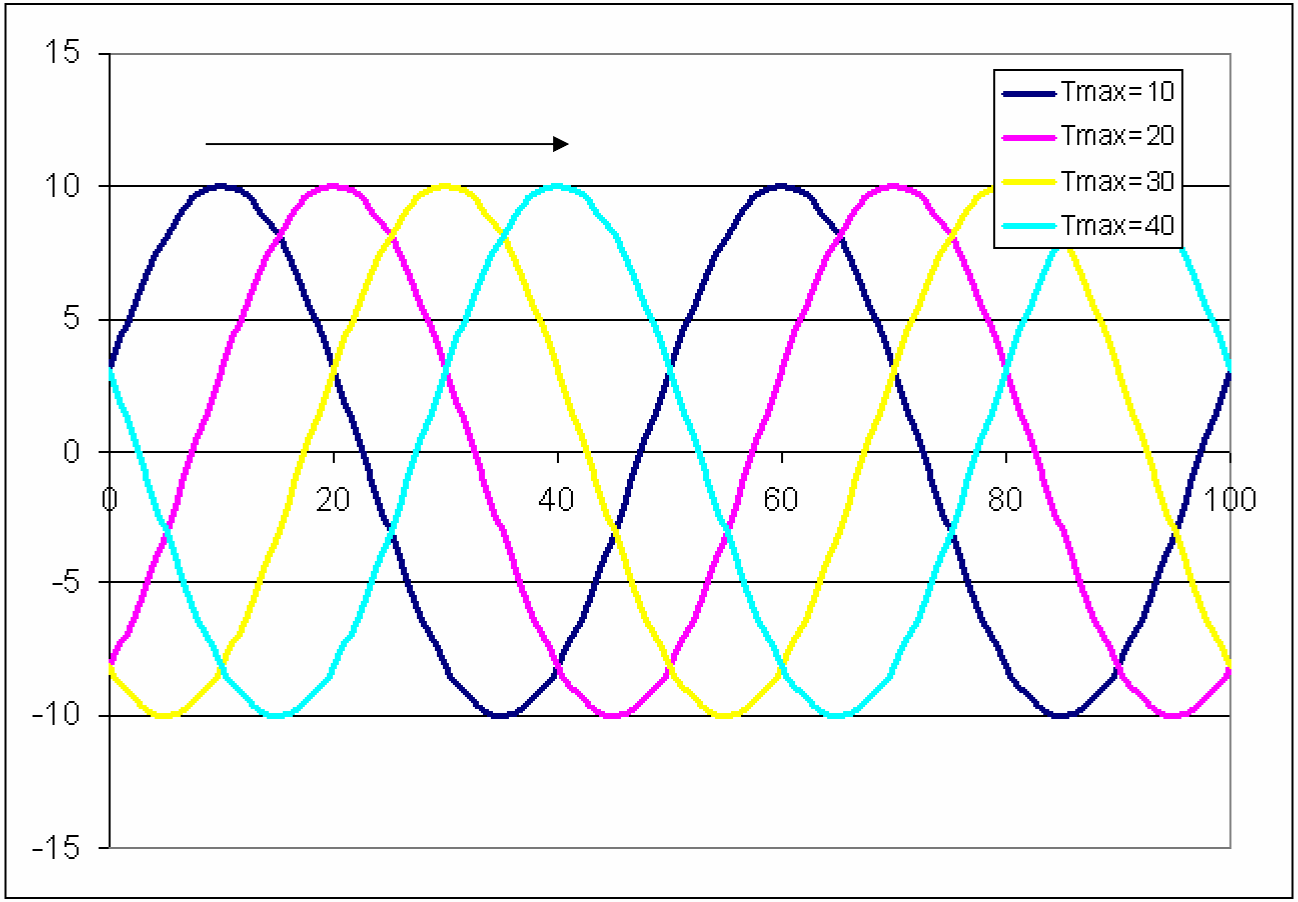
$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$$



Posso agire sull'ampiezza

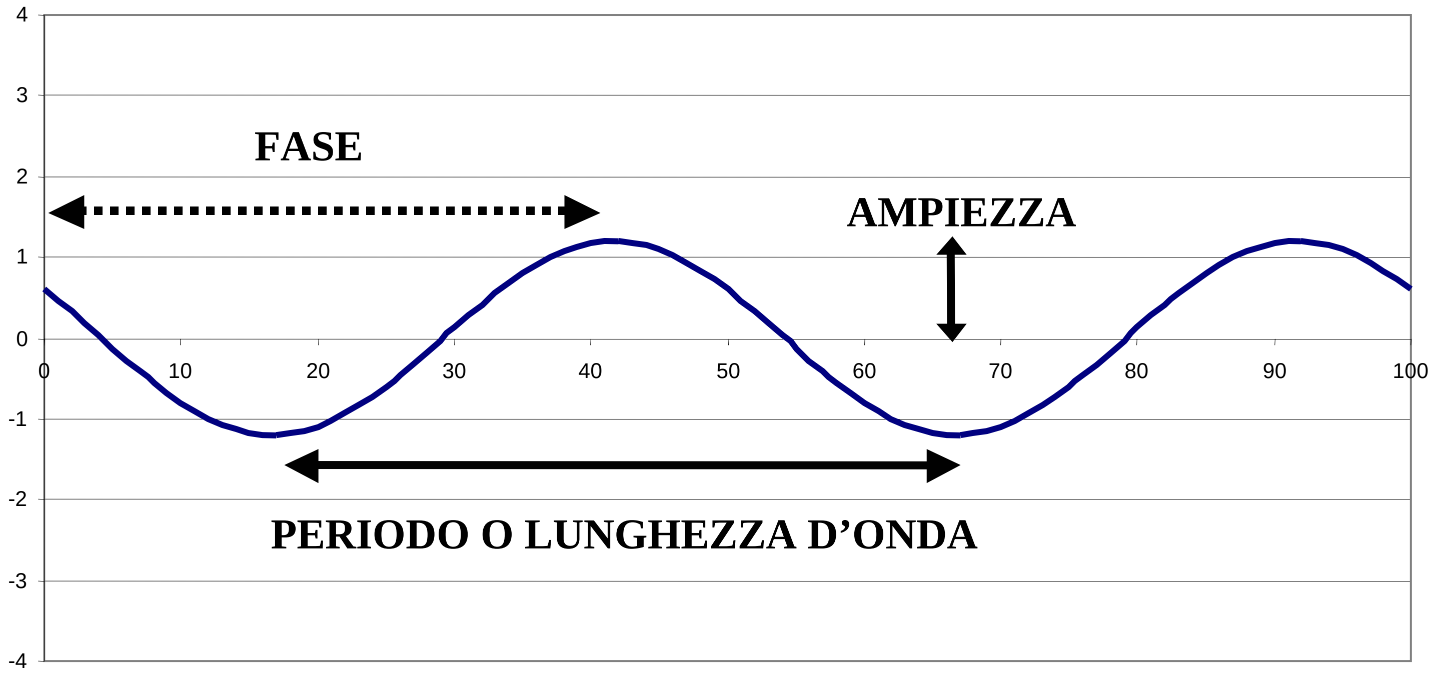


Posso agire sul periodo



Posso agire sulla Fase

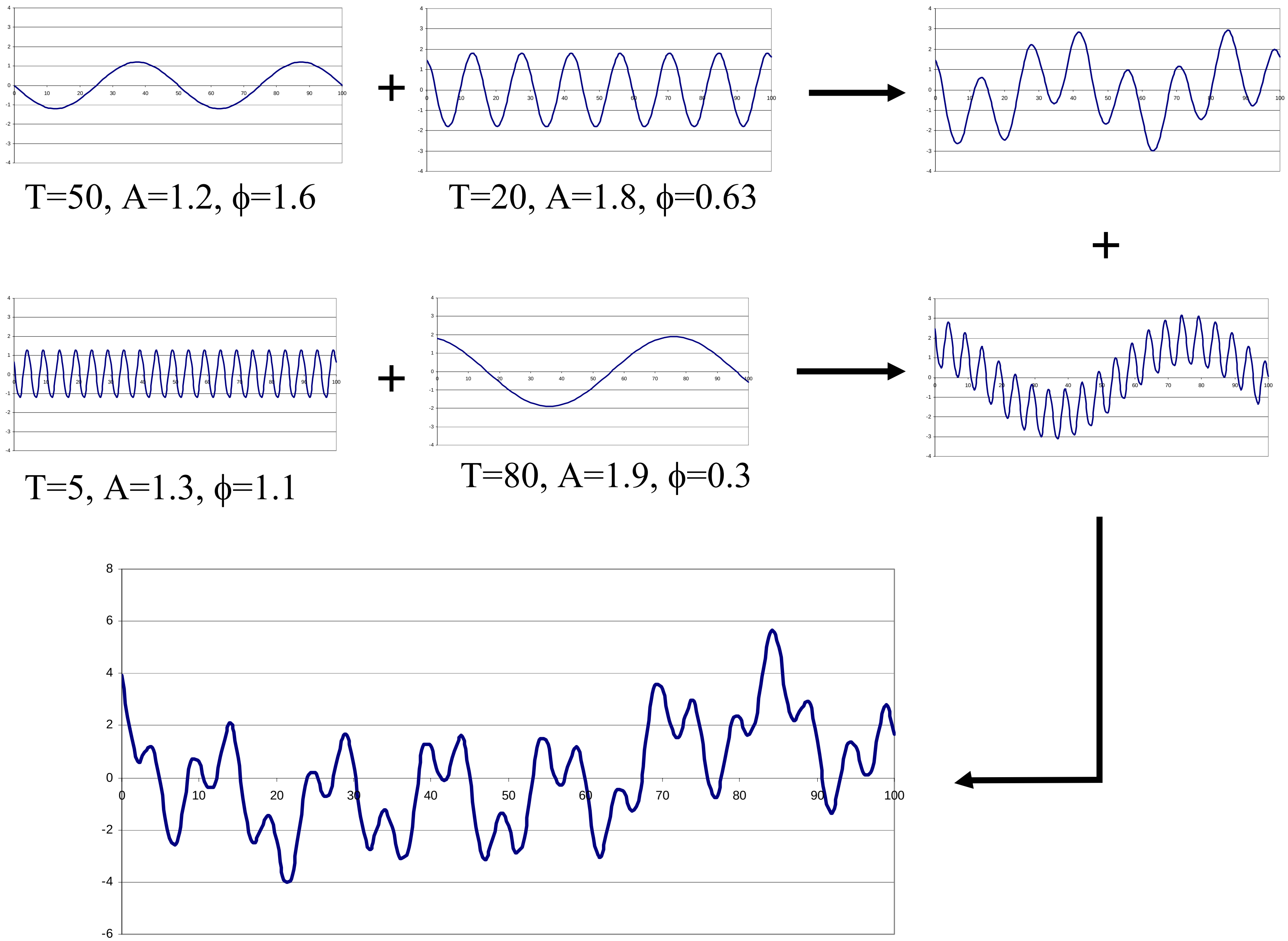
I “Mattoni”



$$F(t) = A\cos(2\pi\nu t - \phi)$$

$$\mathrm{F}(t) = \mathrm{A}\cos(\phi)\cos(2\pi\nu t) + \mathrm{A}\sin(\phi)\sin(2\pi\nu t) \Longrightarrow \mathrm{F}(t) = \alpha\cos(2\pi\nu t) + \beta\sin(2\pi\nu t)$$

$$\mathrm{A}^2 = \alpha^2 + \beta^2 \qquad \phi = \mathrm{atan}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$


T=50, A=1.2, ϕ=1.6
T=20, A=1.8, ϕ=0.63
T=5, A=1.3, ϕ=1.1
T=80, A=1.9, ϕ=0.3

Teorema di Fourier

"Data una qualunque funzione continua (del tempo) è sempre possibile trovare una combinazione lineare di funzioni elementari (in forma di cosinusoidi) che permettono di rappresentarla con la precisione voluta"

$$\boxed{\mathrm{F}(t)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n\cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)+\beta_n\sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)\right)}$$

T è il periodo (o la lunghezza d'onda fondamentale)

In pratica si tratta di tante cosinusoidi con frequenze pari a sottomultipli (n/T) della frequenza fondamentale (1/T)

Si noti che la serie richiede una **somma infinita di addendi** ciascuno dei quali descritto da due parametri (α e β)

Si noti quindi che non tutte le frequenze (o periodi o lunghezze d'onda) sono prese in esame: in particolare, la massima frequenza è 1/T

$$A_n^2 = \alpha_n^2 + \beta_n^2$$

$$\phi_n = \operatorname{atan}\left(\frac{\beta_n}{\alpha_n}\right)$$

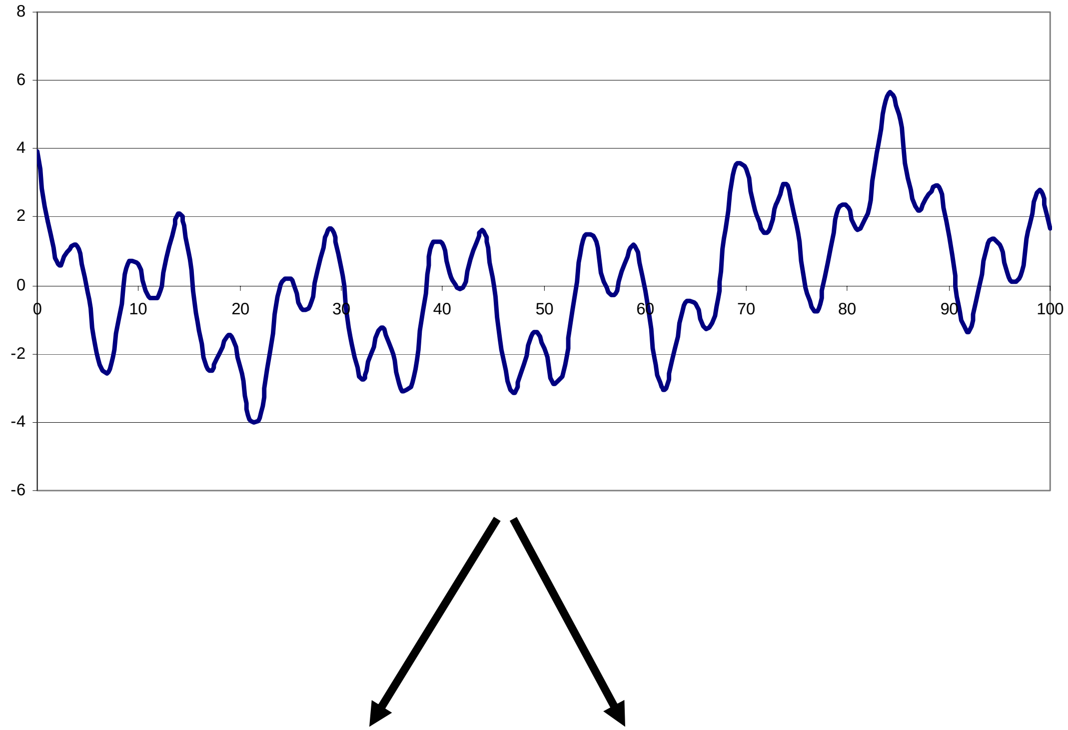
Dato che n corrisponde alla frequenza ν=n/T o al periodo τ= T/n si potrà anche scrivere

$$A_\nu^2 = \alpha_\nu^2 + \beta_\nu^2$$

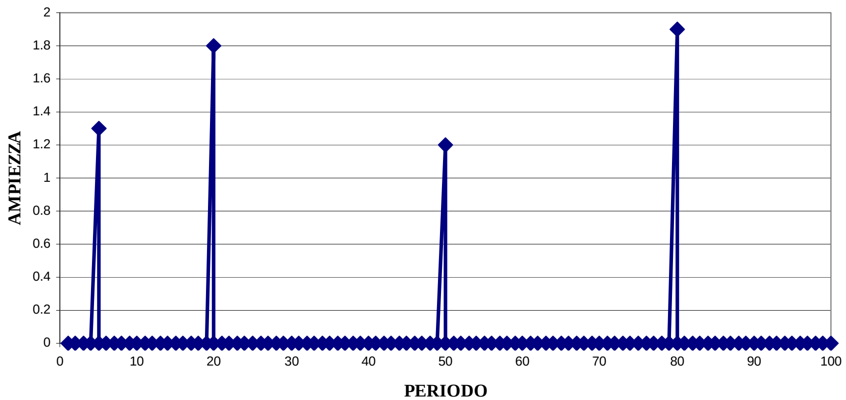
$$\phi_\nu = \operatorname{atan}\left(\frac{\beta_\nu}{\alpha_\nu}\right)$$

Ordinate Spettrali

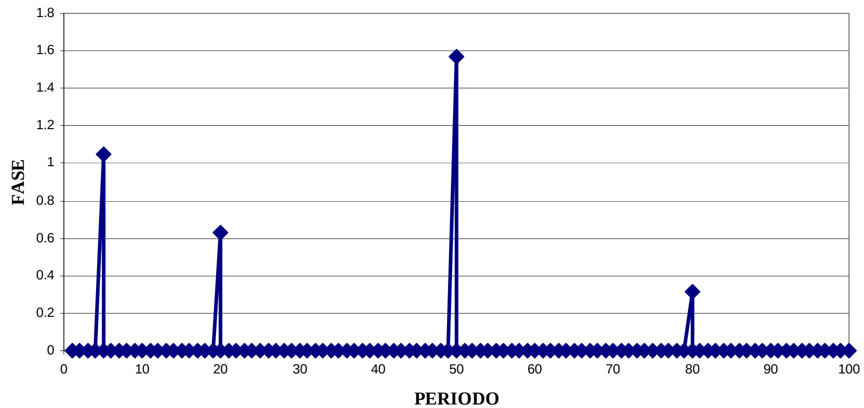
Il grafico che rappresenta le Ampiezze in funzione della frequenza è detto "**Spettro di ampiezza**" quello relativo alla fase è detto "**Spettro di fase**"



Spettro di ampiezza



Spettro di fase



*L'operazione matematica che consente di individuare le caratteristiche delle funzioni necessarie allo scopo in termini di periodo, ampiezza e fase di ciascuna componente (in pratica definire lo spettro) è detta "**Trasformata di Fourier**" ed è eseguibile in modo **automatico** e **univoco***

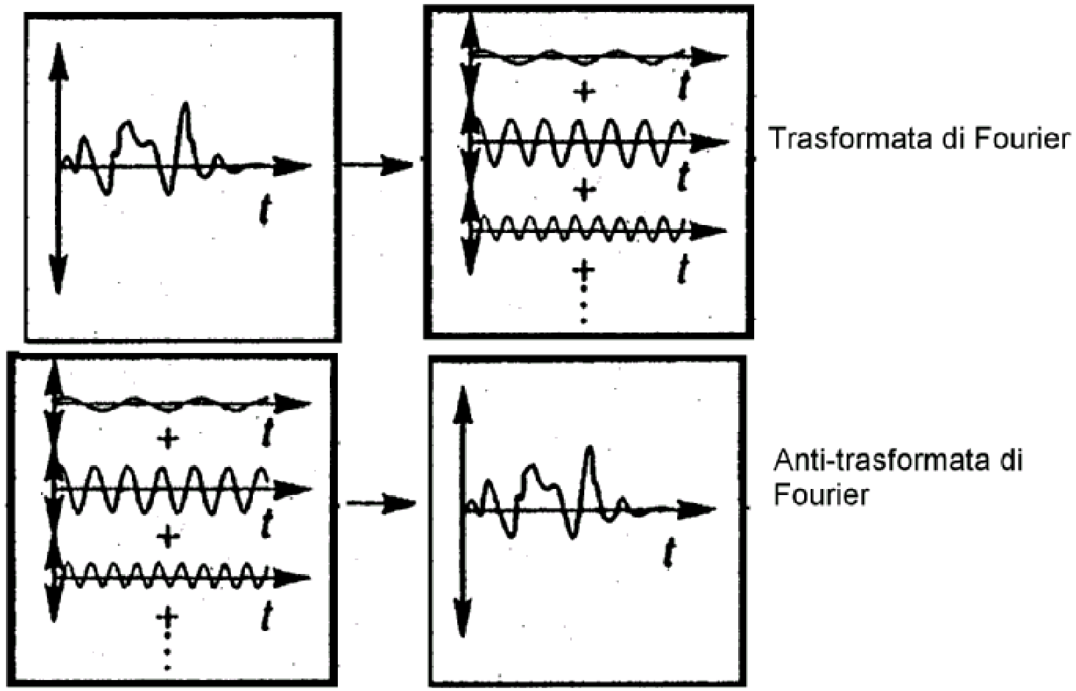
Per esempio, se la funzione F da riprodurre è nota analiticamente si ha che

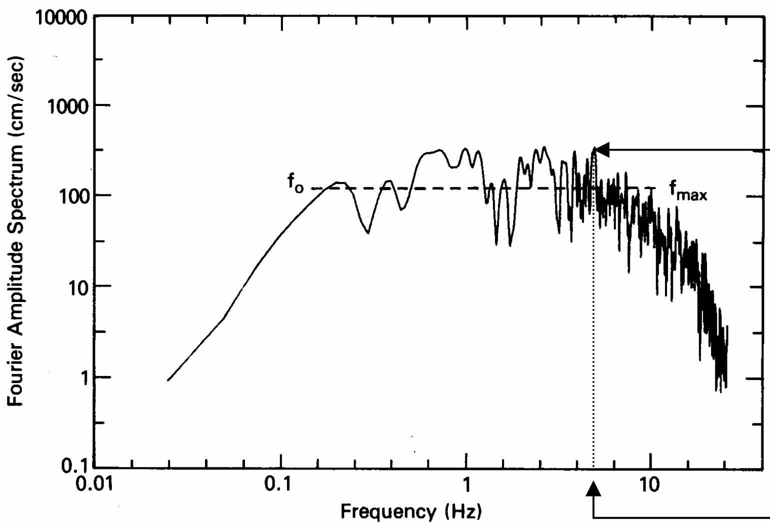
$$\alpha_0 = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\,dt \qquad \alpha_n = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)dt$$

$$\beta_n = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)dt$$

Trasformata di Fourier

E' una procedura formale per determinare univocamente la rappresentazione spettrale di un andamento





$$F(t) = \boxed{A}\cos(2\pi\boxed{\nu}t + \phi)$$

La rappresentazione in termini di trasformata di Fourier può essere anche generalizzata eliminando la scelta (i certi casi arbitraria) del periodo fondamentale T

In particolare, si può dimostrare che anche se il periodo della serie viene esteso indefinitamente ($T\to\infty$), la rappresentazione in termini spettrali della serie F(t) esiste ancora, può essere calcolata e viene ancora indicata come **trasformata di Fourier** della serie originale

$$F(t) \xrightarrow{\textit{Trasformata}} \widetilde{F}(\nu)$$
$$\widetilde{F}(\nu) \xrightarrow{\textit{Anti-Trasformata}} F(t)$$

Questa funzione **Trasformata di Fourier** contiene informazioni sia sulla Ampiezza che sulla fase delle componenti spettrali (*è una funzione a valori complessi*). Inoltre, è una funzione continua e quindi non è a valori discreti come la sua versione meno generale

E’ importante sottolineare che

1. Definire lo spettro di una serie temporale non significa “capirla” ma solo “rappresentarla” o “descriverla”

2. A meno di situazioni specifiche, le componenti <u>non</u> sono “**nella serie**” ma solo nella nostra rappresentazione di questa

3. In pratica, **per via matematica**, è sempre possibile rappresentare la serie come combinazione di funzioni periodiche, **ma questo non implica che la serie sia l’effetto di una combinazione di processi periodici**

Nel caso specifico dei segnali sismici, si dimostra però che

1. qualunque perturbazione indotta all'interno o alla superficie di un mezzo elastico, induce una perturbazione che si propaga all'interno del mezzo

2. questa perturbazione può essere sempre rappresentata come serie di Fourier, ovvero come una combinazione, più o meno complessa, di funzioni periodiche (serie di Fourier)

3. la forma di questa serie dipende dalle caratteristiche del mezzo e della sorgente responsabile della perturbazione

4. lo scuotimento F(t) osservato alla superficie come effetto di una data sorgente S(t) sono legate fra loro dalla relazione

$$\tilde{F}(\nu) = G(\nu)\tilde{S}(\nu)$$

G(ν) è detta **funzione di risposta** e dipende solo dalle caratteristiche del mezzo

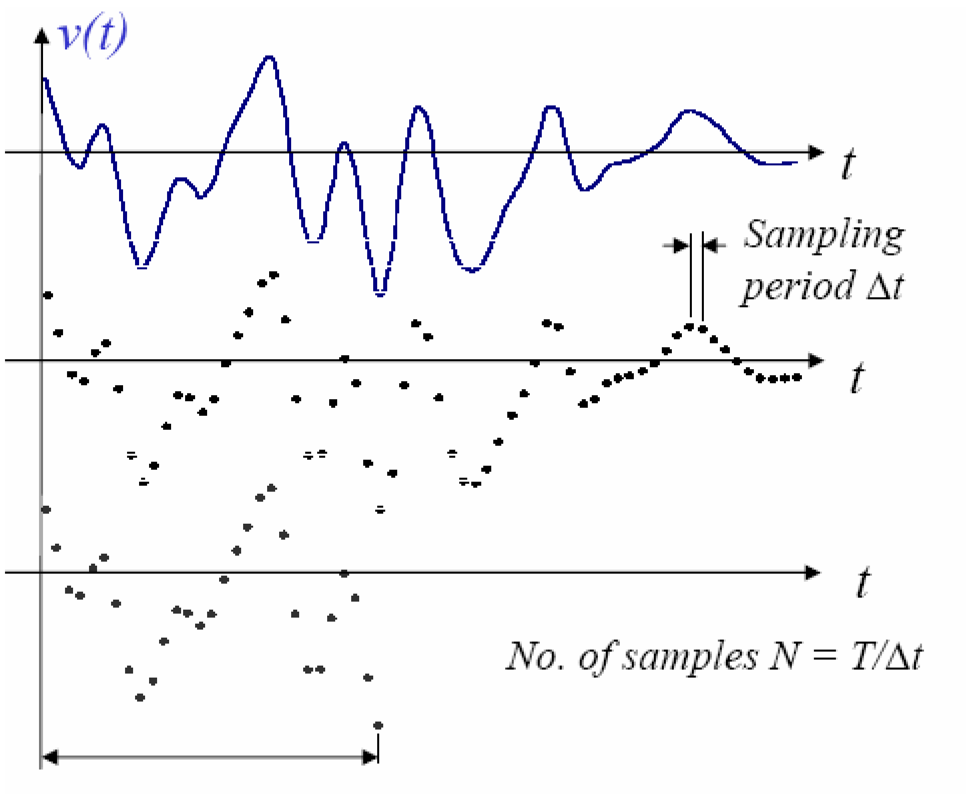
Data questa relazione si vede che, *G(ν)* contiene tutte le informazioni sulle **caratteristiche del mezzo** e sulle **modalità di propagazione** delle onde sismiche

In linea di principio quindi, dal rapporto fra le trasformate delle serie che rappresentano lo scuotimento e la sollecitazione (per esempio un impulso) sarebbe possibile ricavare informazioni sulla "**risposta**" del terreno alla sollecitazione e quindi caratterizzarlo compiutamente. Infatti

$$G(\nu) = \frac{\widetilde{S}(\nu)}{\widetilde{F}(\nu)}$$

Limiti dell’analisi spettrale nei casi pratici.

La serie originale in generale è nota **per punti** (è discretizzata dalle procedure sperimentali) ed ha una durata **finita**



Questo pone ovviamente dei limiti alle possibili rappresentazioni spettrali della sequenza

In pratica, è come se cercassimo di rappresentare una serie di infiniti termini con una serie costituita da un numero finito di termini

Si dimostra infatti che

- È possibile definire solo un numero finito di componenti spettrali (pari alla metà del numero N di valori campionati): quindi, non tutti i possibili periodi eventualmente presenti sono identificabili
- Il periodo minimo che è possibile considerare è pari al doppio del passo di campionamento ($T_{min}=2\Delta t$)
- Il periodo massimo corrisponde alla **durata della serie di misure** ($T_{max}=T$)

Quindi, anche in presenza di un processo costituito da una combinazione di processi elementari periodici, la effettiva riconoscibilità di questi ultimi è limitate dalle particolari condizioni sperimentali

Se la funzione F da riprodurre è nota “per punti” (su N valori equi-spaziati) si ha che le relazioni

$$\alpha_0 = \frac{2}{T}\int_0^T F(x)\,dx \qquad \alpha_n = \frac{2}{T}\int_0^T F(x)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)dx$$

$$\beta_n = \frac{2}{T}\int_0^T F(x)\sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)dx$$

assumono la nuova forma

$$\alpha_0 = \frac{2}{M}\sum_{i=1}^{M} F_i \qquad \alpha_k = \frac{2}{M}\sum_{i=1}^{M} F_i \cos\left(\frac{2\pi k}{T}x_i\right) = \frac{2}{M}\sum_{i=1}^{M} F_i \cos\left(\frac{2\pi k}{M}i\right)$$

$$M = N/2 \qquad \beta_k = \frac{2}{M}\sum_{i=1}^{M} F_i \sin\left(\frac{2\pi k}{T}x_i\right) = \frac{2}{M}\sum_{i=1}^{M} F_i \sin\left(\frac{2\pi k}{M}i\right)$$

Pertanto,

- Se effettivamente nella serie è presente anche l'effetto di un processo caratterizzato da una scala temporale caratteristica **molto superiore** alla durata della serie, questo non può essere identificato a partire dai soli dati della serie

- Se questo processo è caratterizzato una scala temporale **inferiore a quella minima campionata** (pari a 1/2 passo di campionamento) questo non può essere caratterizzato studiando solo la serie

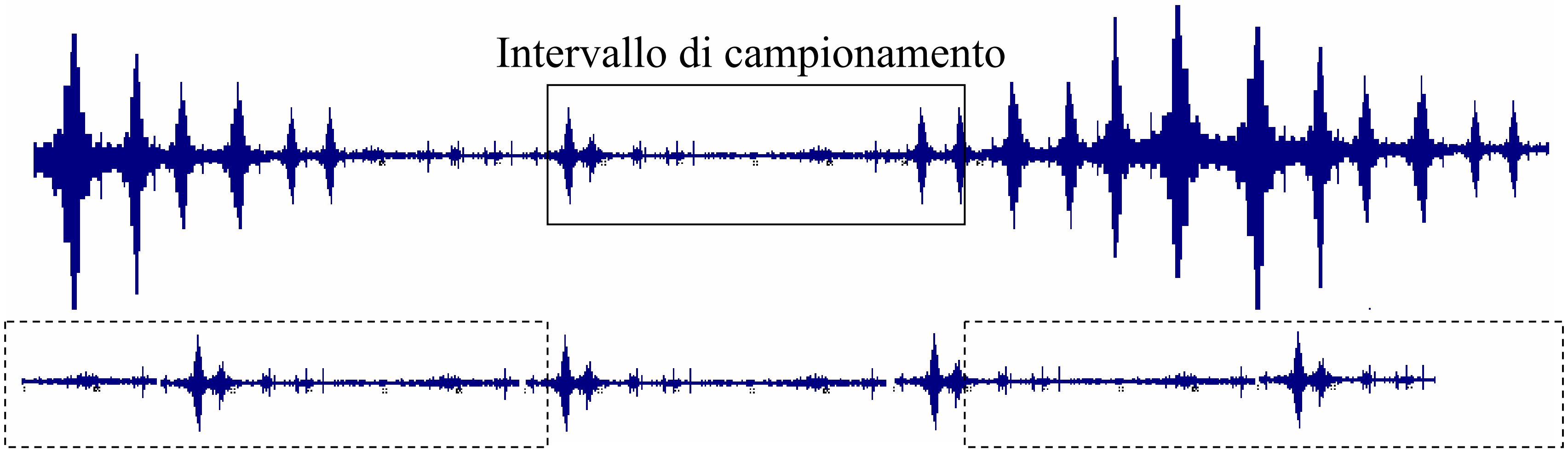
In realtà le limitazioni indotte dalle modalità di campionamento della sequenza sono assai più gravi.

Infatti, non solo gli eventuali processi con periodi maggiori o minori di quelli campionati non vengono ben caratterizzati, ma la loro presenza influenza anche la stima dei processi con periodi compresi nell'intervallo analizzato

Questo effetto è legato alle caratteristiche dello strumento matematico utilizzato, il quale di fatto assume che tutto quello che c'è da sapere **è tutto nella serie campionata**

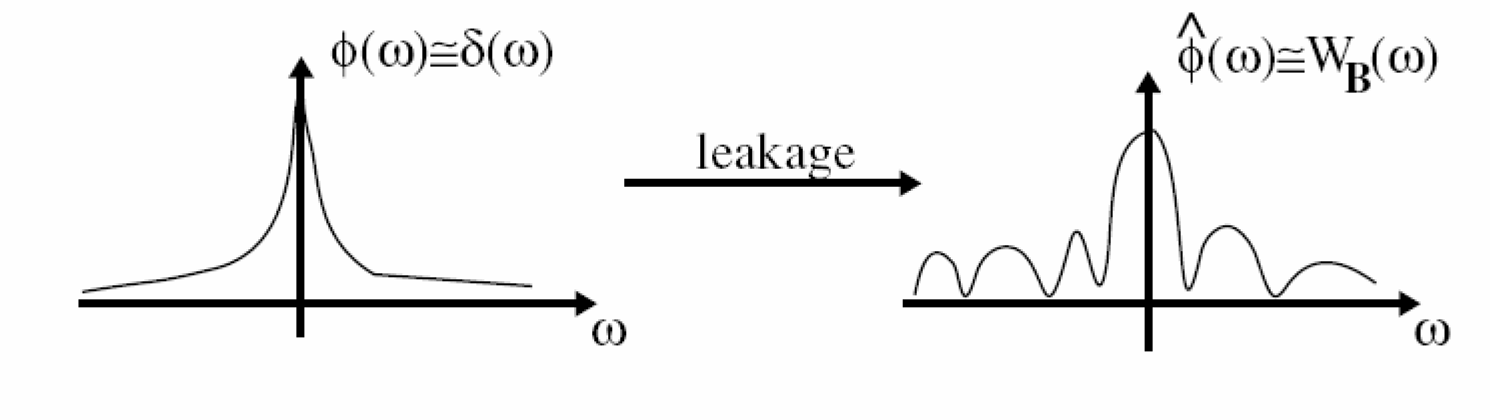
Un effetto di questa assunzione è che l'intera serie è immaginata come **periodica** ovvero che **questa si ripeta all'infinito con le stesse caratteristiche**

Serie Reale

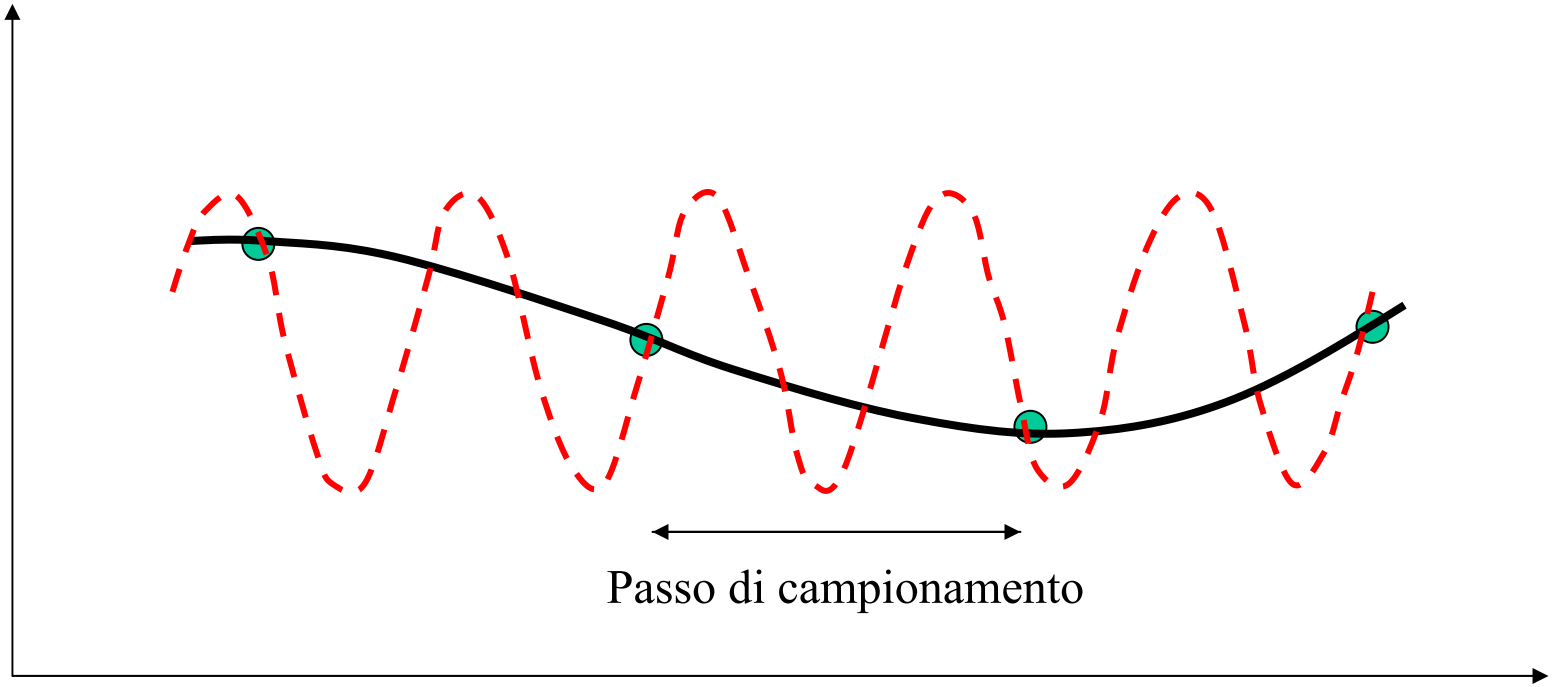


Modello

Si dimostra che l’effetto di questa “finestratura” è quello di far comparire nello spettro degli “echi” delle ampiezze effettivamente esistenti

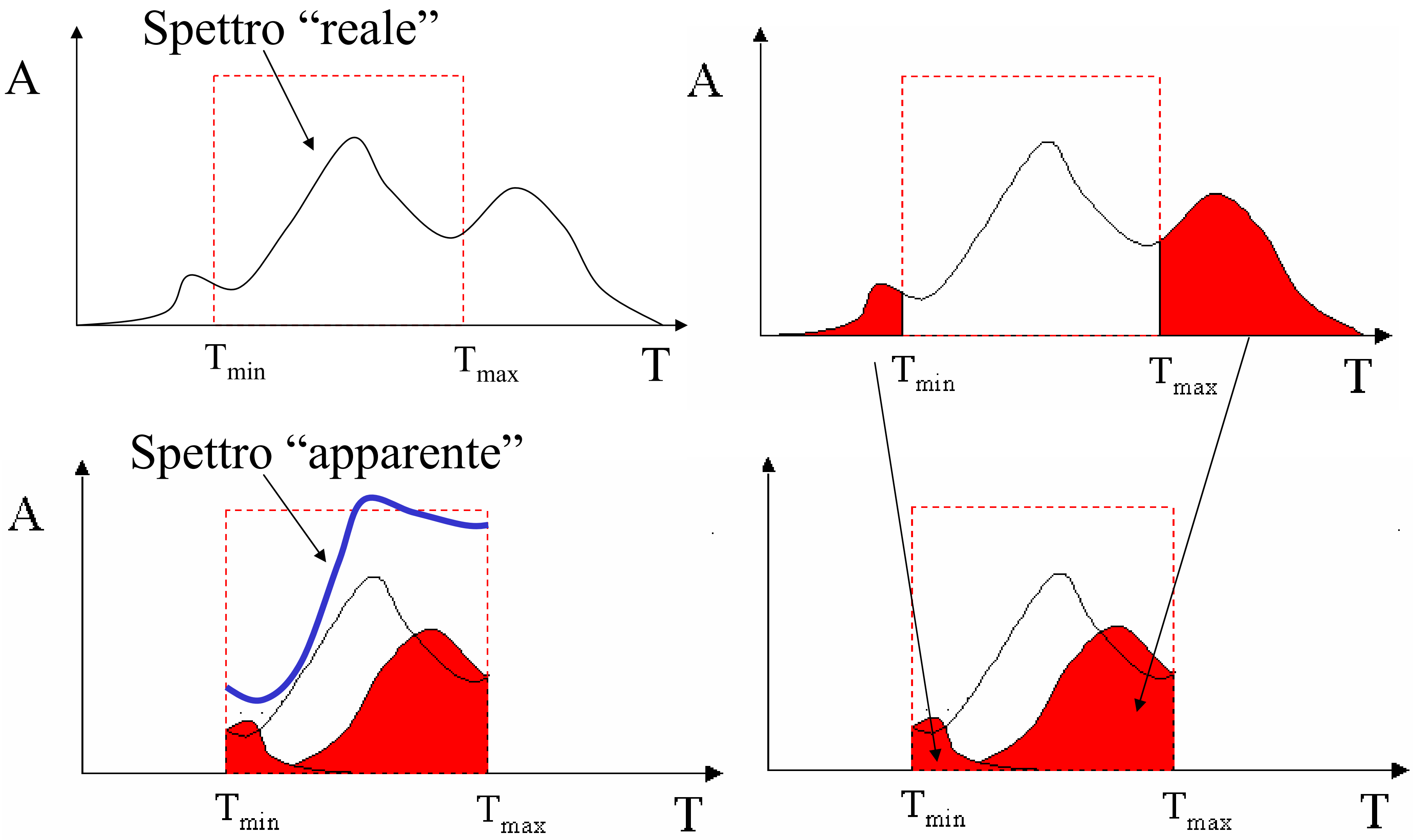


Questo fenomeno si chiama “leakage” (sbrodolamento) e produce la comparsa di massimi “spuri” nello spettro delle empiezze

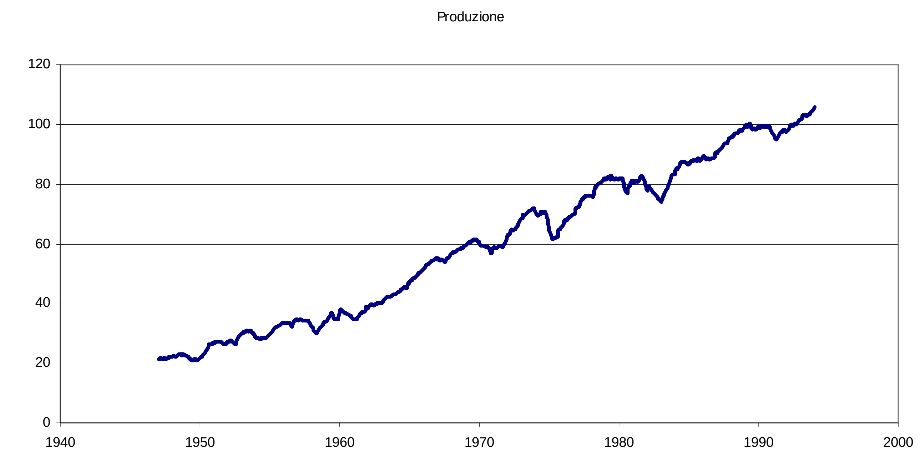


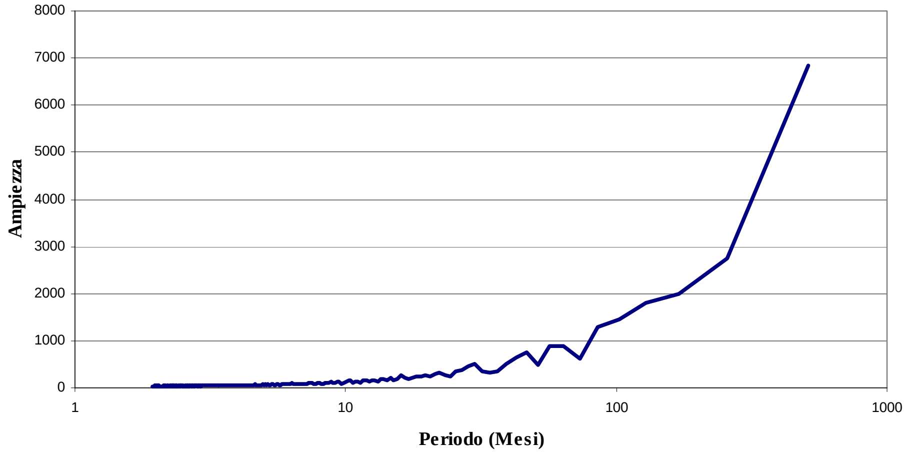
L' aliasing

Un altro fenomeno è detto "aliasing" e si manifesta come la comparsa (all'interno dello spettro sperimentale) di componenti che si trovano al di sopra e al di sotto delle frequenze considerate


Spettro "reale"
A
T min
T max
T
A
T min
T max
T
Spettro "apparente"
A
T min
T max
T
T min
T max
T

Per esempio, la presenza di fenomeni caratterizzati da una scala temporale superiore alla durata della serie si manifesta in forma di **deriva**

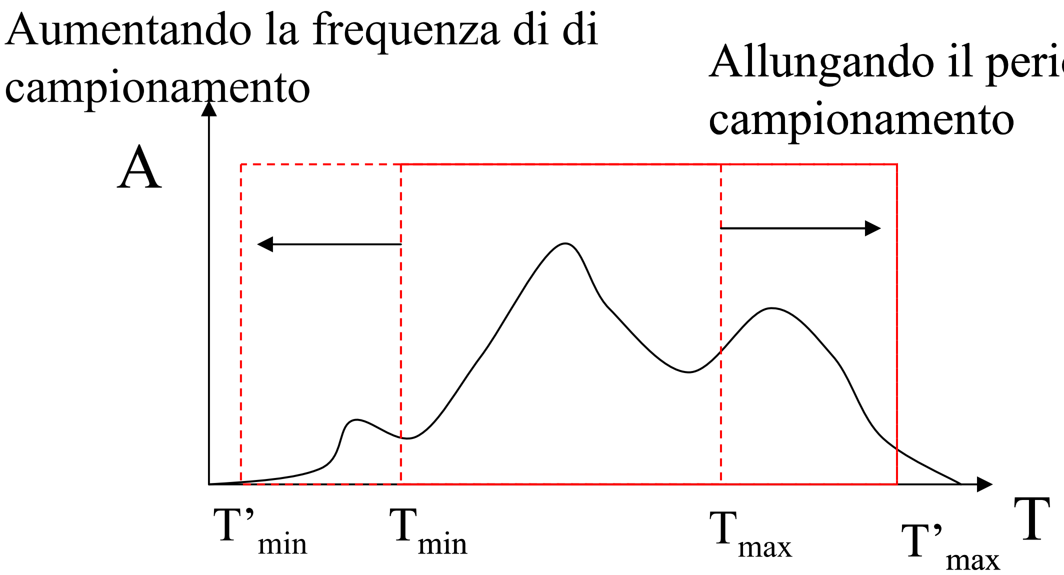




Tuttavia, la presenza di una deriva **non implica** necessariamente la presenza di una componente di lungo periodo (non stazionarietà)

E’ importante sottolineare come la presenza di fattori che agiscono su scale temporali diverse da quelle considerate possono produrre effetti “spuri” difficili da individuare

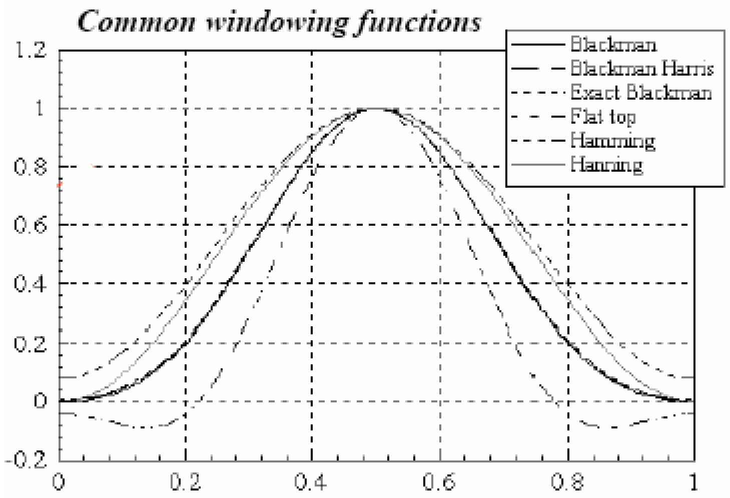
Questi effetti spuri possono essere eliminati se il campionamento effettuato (sia in termini di durata segnale che di passo di campionamento) viene reso compatibile con le caratteristiche del fenomeno studiato



In alternativa:

la presenza di fattori con scale temporali non analizzabili viene rimossa preventivamente per via numerica attraverso opportune procedure numeriche (detrend e tapering e vari filtri anti-aliasing analogici)

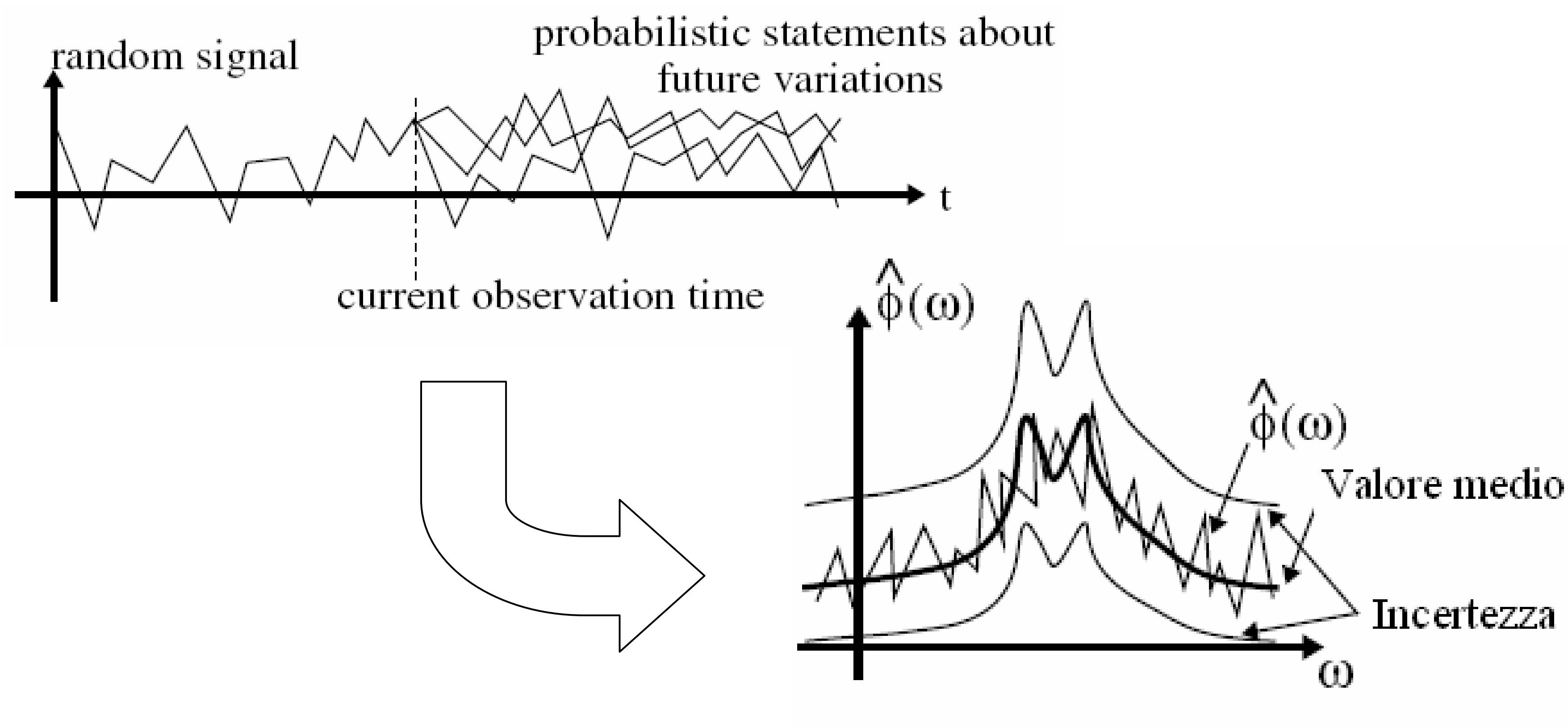
Queste procedure vanno usate con cautela dato che “cambiano” il dato sperimentale e possono a loro volta produrre effetti indesiderati



Un altro aspetto importante riguarda l'effetto delle incertezze sperimentali o di influenze dovute a processi intrinsecamente casuali (*di fatto la serie temporale è una serie stocastica*)

Le fluttuazioni e quindi delle ampiezza spettrali (oltre che delle fasi)

Avremo quindi ampiezze spettrali medie e delle varianze associate che saranno espressione della variabilità casuale della serie originale



L’analisi dei rapporti esistenti fra le variazioni casuali (incertezze) nella serie e quelle delle relative ampiezze spettrali dimostra che:

- *l’incertezza sulla singola ampiezza spettrale (ovvero dell’ampiezza della singola componente armonica) è proporzionale all’ampiezza spettrale stessa (**maggiore è l’importanza di una data armonica maggiore è la sua incertezza!**)*
- *Allungare la durata della serie o ridurre il passo di campionamento **non ha alcun effetto** su questo problema*

Bisogna quindi agire in un altro modo

Metodo di Bartlett

a. *La sequenza viene divisa in intervalli di uguale durata*

b. *Viene calcolato lo spettro in ogni intervallo*

c. *Si calcola lo spettro eseguendo frequenza per frequenza una media dei valori ottenuti per ogni frequenza nelle diverse finestre*

d. *Maggiore è il numero di intervalli minore è l'incertezza sulla stima finale*

Metodo di Daniell

a. *Viene calcolato lo spettro sull'intera durata (o lunghezza) della misura*

b. *Per ciascuna frequenza viene calcolata un'ampiezza (o una fase) che è la media delle ampiezza calcolate nelle frequenze contigue*

c. *Maggiore è l'ampiezza di questa finestra, minore è l'incertezza sulla stima*

Entrambe i metodi hanno dei costi in particolare, in entrambe in casi, alla riduzione della incertezza sulla singola ampiezza (o fase) si accompagna una riduzione della risoluzione in frequenze (è più difficile distinguere due armoniche vicine